Václav Dupač

O Kiefer-Wolfowitzově aproximační methodě

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 1, 47--75

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117235



Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

O KIEFER-WOLFOWITZOVĚ APROXIMAČNÍ METHODĚ

VÁCLAV DUPAČ, Praha.

(Došlo dne 20. ledna 1956.) DT: 519.282

Jsou vyšetřovány asymptotické vlastnosti Kiefer-Wolfowitzova stochastického iteračního postupu pro odhad hodnoty $x = \Theta$, v níž regresní funkce $M(x)$ nabývá svého maxima. Rozlišují se dva případy: V prvním se předpokládá, že derivace $M'(x)$ leží mezi dvěma přímkami s kladnými směrnicemi (= vlastnost V) a že rozptyly odchylek od regresní funkce jsou ohraničené; v druhém případě se předpokládá, že V platí v nějakém okolí Θ, že odchylky od regresní funkce jsou ohraničené a že je znám konečný interval obsahující Θ. V obou případech jsou odvozeny řádové odhady rozptylů n-tých aproximací, je zodpověděna otázka o optimální volbě konstant a_n, c_n a za dodatečných předpokladů je dokázána asymptotická normalita vhodně normovaných n-tých aproximací. Myšlenkově je vzorem práce K. L. CHUNGA [7], v níž se studují obdobné vlastnosti Robbins-Monroovy methody pro řešení rovnice $M(x) = \alpha$.

1. Stochastické aproximační methody

Stochastickými aproximačními methodami se nazývají jisté iterační postupy, jimiž lze přibližně řešit tuto úlohu:

$M(x)$ je funkce, jejíž analytické vyjádření neznáme, která však splňuje určité předpoklady. Kromě těchto předpokladů lze získat další informaci o funkci $M(x)$ jenom tak, že zvolíme libovolně nějakou hodnotu x a k ní experimentálně zjistíme hodnotu $y = M(x) + \varepsilon$, kde ε je určitá náhodná složka. Pokusů můžeme provést libovolný, avšak konečný počet; hodnotu x můžeme od pokusu k pokusu měnit a to i v závislosti na výsledcích pokusů předcházejících. Je-li x_n hodnota x zvolená v n-tém pokusu, pak nechť podmíněné rozložení pravděpodobností náhodné složky ε_n závisí jen na x_n (a nikoli na pokusech předcházejících) a střední hodnota tohoto rozložení nechť je rovna nule.

Úkolem je nalézt co nejlepší přiblížení té hodnotě x, pro níž funkce $M(x)$ nabývá nějaké význačné hodnoty (na př. svého maxima nebo dané hodnoty α).

Úlohy řešení rovnice, resp. nalezení extrémů funkce mají popsaný charakter v mnoha praktických případech, kde funkční závislosti jsou zjišťovány empiricky. Jestliže náhodné složky jsou zanedbatelné velikosti, nebo jestliže neznáme pouze parametry funkce $M(x)$, ale známe typ této funkce (a splňují-li přitom náhodné složky určité předpoklady), lze k řešení použít běžných method praktické analysy, v posledním případě ve spojení na př. s methodou nejmenších čtverců; není-li tomu tak, jsou úloze adekvátní stochastické aproximační methody.

První methodu tohoto typu (pro řešení rovnice $M(x) = \alpha$) odvodili H. Robbins a S. Monro [1]. Autoři předpokládají:

$\{H(y|x)\}$ je systém distribučních funkcí, závislých na reálném parametru x; $M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, \mathrm{d}H(y|x)$ je regresní funkce; α je daná, Θ hledaná konstanta; dále platí

(A) existuje konstanta $C > 0$ tak, že $\int_{-C}^{C} \mathrm{d}H(y|x) = 1$ pro $-\infty < x < +\infty$,

a buďto

(B) $M(x) \leqq \alpha - \delta$ pro $x < \Theta$, $M(x) \geqq \alpha + \delta$ pro $x > \Theta$, pro nějaké $\delta > 0$,

nebo

(B_1) $M(x)$ je neklesající, $M(\Theta) = \alpha$, $M'(\Theta) > 0$.

Budiž $\{a_n\}$ posloupnost kladných čísel taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$.

Zvolme libovolně konstantu x_1 a pro $n \geqq 1$ definujme

$$x_{n+1} = x_n + a_n(\alpha - y_n),$$

kde y_n je náhodná proměnná, jejíž distribuční funkce pro daná $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ jest $H(y|x_n)$. Za těchto předpokladů x_n konverguje k Θ (pro $n \to \infty$) podle kvadratického středu a tedy také podle pravděpodobnosti.

J. Wolfowitz [2] nahradil (A) předpokladem

(A_1) $|M(x)| \leqq C$, $\int_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \, \mathrm{d}H(y|x) \leqq \sigma^2$ pro $-\infty < x < +\infty$

a současně zeslabil (B_1) na

(B_2) $M(x) \lesseqqgtr \alpha$ pro $x \lesseqqgtr \Theta$, $M(x)$ je rostoucí pro $|x - \Theta| < \delta$,

$$\inf_{|x-\Theta| \geqq \delta} |M(x) - \alpha| > 0.$$

Za těchto předpokladů x_n konverguje k Θ podle pravděpodobnosti.

J. R. Blum [3] nahradil první nerovnost v (A_1) slabší nerovností $|M(x)| \leqq C + D|x|$, $C \geqq 0$, $D \geqq 0$, současně zeslabil (B_2) na

(B_3) $M(x) \lesseqgtr \alpha$ pro $x \lesseqgtr \Theta$, $\inf_{\delta_1 \leqq |x-\Theta| \leqq \delta_2} |M(x) - \alpha| > 0$ pro lib. $0 < \delta_1 < \delta_2$

a dokázal, že za těchto předpokladů $x_n \to \Theta$ s pravděpodobností 1.

Konvergenci $x_n \to \Theta$ s pravděpodobností 1 dokázal rovněž G. KALLIANPUR [4] za původních RM předpokladů, s jistým omezením na volbu konstant a_n. (Toto omezení obsahuje implicitně i omezení na funkci $M(x)$.) Důkaz je odlišný od Blumova a umožňuje jako vedlejší výsledek horní řádový odhad veličin $b_n = \mathsf{E}(x_n - \Theta)^2$.

Odhady veličin b_n se podrobněji zabýval L. SCHMETTERER. V článku [5] vychází z předpokladů

(A_2) $\mathsf{E}[(y_n - \alpha)^2] \leqq C = C(x_1, \Theta)$ pro $n = 1, 2, \ldots$,

(B_4) $M(x) \lesseqqgtr \alpha$ pro $x \lesseqqgtr \Theta$, $|M(x) - \alpha| \geqq K|x - \Theta|$ pro $-\infty < x < +\infty$ a nějaké $K > 0$;

v článku [6] pak vychází z předpokladu (A) a

(B_5) $M(x) \lessgtr \alpha$ pro $x \lessgtr \Theta$, $|M(x) - \alpha| \geqq K|x - \Theta|$ pro $|x - \Theta| < \varepsilon$, $|M(x) - \alpha| \geqq B$ pro $|x - \Theta| \geqq \varepsilon$, pro nějaká $K > 0$, $B > 0$, $\varepsilon > 0$.

(Předpoklad (B_5) je slabší než (B_1).) V obou případech je dokázána konvergence $x_n \to \Theta$ podle kvadratického středu a při speciální volbě a_n jsou odvozeny horní řádové odhady veličin b_n. V prvním případě platí

$$\left(a_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1\right) \Rightarrow b_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right);$$

$$\left(a_n = \frac{a}{n}, \quad a > \frac{1}{2K}\right) \Rightarrow b_n = O\left(\frac{1}{n}\right);$$

v druhém případě

$$\left(a_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1\right) \Rightarrow b_n = O\left(\frac{1}{n^{\mathrm{Min}(2\alpha - 1,\, K_1(1-\alpha))}}\right);$$

$$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow b_n = O\left(\frac{1}{\log^{K_1} n}\right),$$

kde K_1 je určitá konstanta závislá na $M(.)$, C, $|x_1 - \Theta|$.

Pozoruhodné asymptotické vlastnosti RM methody odvodil K. L. CHUNG [7]. Rozlišuje dva případy — „omezený“ a „quasi-lineární“. V prvním případě vyslovuje předpoklad (A), dále

(B_0) $M(x) \lesseqqgtr \alpha$ pro $x \lesseqqgtr \Theta$, $M'(\Theta) > 0$;

(C) $\inf\limits_{|x - \Theta| > \delta} |M(x) - \alpha| > 0$ pro každé $\delta > 0$;

případně ještě

(D) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \, \mathrm{d}H(y)|x) \geqq K > 0 \qquad$ pro $-\infty < x < +\infty$,

(E) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \, \mathrm{d}H(y)|x) = \sigma^2 > 0 \qquad$ pro $-\infty < x < +\infty$.

Za předpokladů (A), (B_0), (C) a při volbě $a_n = \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}, \frac{1}{2(1+K')} < \varepsilon < \frac{1}{2}$, kde K' je určitá konstanta závislá na $M(.)$, C, $|x_1 - \Theta|$, odvozuje horní odhady pro absolutní momenty $\beta_n^{(r)} = \mathsf{E}\,[|x_n - \Theta|^r]$ všech řádů, za dodatečného předpokladu (D) také dolní odhady pro $\beta_n^{(r)}$ a za dodatečného předpokladu (E) dokazuje[1]), že limitní rozložení náhodných proměnných $n^{\frac{1-\varepsilon}{2}}(x_n - \Theta)$ je normální s nulovou střední hodnotou a s rozptylem $\frac{\sigma^2}{2\alpha_1}$, kde $\alpha_1 = M'(\Theta)$.

V druhém případě nahrazuje (A) předpokladem

(A_0) $M(x)$ je ohraničená v každém konečném intervalu,

$$0 < \liminf_{|x|\to\infty} \frac{M(x)}{x} \leqq \limsup_{|x|\to\infty} \frac{M(x)}{x} < +\infty$$

a vyslovuje další předpoklad

(F) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^p \, \mathrm{d}H(y|x) \leqq K_p$ pro $-\infty < x < +\infty$ a pro nějaké sudé $p > 2$.

Za předpokladů (A_0), (B_0), (C), (F) a při volbě $a_n = \frac{a}{n}$, $a > \frac{1}{2K''}$, (K'' má obdobný význam jako K') odvozuje horní odhady pro $\beta_n^{(r)}$, $r \leqq p$ a za dodatečného předpokladu (E) a za předpokladu, že (F) platí pro každé sudé $p > 2$ dokazuje,[1]) že limitní rozložení náhodných proměnných $n^{\frac{1}{2}}(x_n - \Theta)$ je normální $N\left(0, \frac{\sigma^2 a^2}{2\alpha_1 a - 1}\right)$.

Závěrem je za jistých podmínek dokázáno, že veličina x_{n+1}, kterou dostaneme provedením n kroků RM methody, je asymptoticky minimaximálním odhadem Θ.

Zobecněním RM methody na případ, kdy x i $M(x)$ jsou k-rozměrné vektory, se zabýval J. R. Blum [8]; za dosti speciálních předpokladů dokázal, že zobecněná RM methoda konverguje s pravděpodobností 1.

J. Kiefer a J. Wolfowitz [9] odvodili (vhodnou modifikací RM methody) stochastický iterační postup pro odhad hodnoty $x = \Theta$, v níž regresní funkce $M(x)$ nabývá svého maxima:

Nechť $H(y|x)$ a $M(x)$ mají týž význam jako dříve; dále nechť

(A') $M(x)$ je rostoucí pro $x < \Theta$ a klesající pro $x > \Theta$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \, \mathrm{d}H(y|x) \leqq \sigma^2 \text{ pro } -\infty < x < +\infty;$$

---

[1]) Důkaz obsahuje chybu (neoprávněné použití 1. věty o střední hodnotě v integrálním počtu); nicméně tvrzení i základní myšlenka důkazu jsou správné.

(B′) existují $\beta > 0$, $B > 0$ tak, že

$$|x' - \Theta| + |x'' - \Theta| < \beta \Rightarrow |M(x') - M(x'')| \leqq B\,|x' - x''|\,;$$

(C′) existují $\varrho > 0$, $R > 0$ tak, že $|x' - x''| < \varrho \Rightarrow |M(x') - M(x'')| < R$;

(D′) k libovolnému $\delta > 0$ existuje $\pi(\delta) > 0$ tak, že

$$|x - \Theta| > \delta \Rightarrow \inf_{\frac{1}{2}\delta > \varepsilon > 0} \frac{|M(x + \varepsilon) - M(x - \varepsilon)|}{\varepsilon} > \pi(\delta)\,.$$

Nechť $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ jsou posloupnosti kladných čísel takové, že

$$c_n \to 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n < +\infty\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^2 < +\infty.$$

Zvolme libovolně konstantu x_1 a pro $n \geqq 1$ definujme

$$x_{n+1} = x_n + a_n \frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\,,$$

kde y_{2n}, y_{2n-1} jsou náhodné proměnné, jež pro daná $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, \ldots, y_{2n-2}$ mají po řadě distribuční funkce $H(y|x_n + c_n)$, $H(y|x_n - c_n)$ a jsou nezávislé. Za těchto předpokladů $x_n \to \Theta$ podle pravděpodobnosti.

J. R. Blum dokázal [3], že KW methoda konverguje s pravděpodobností 1; přitom lze vynechat předpoklady (B′) a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n < +\infty$. Rovněž tato methoda byla v [8] zobecněna na případ, kdy $M(x)$ je funkce k proměnných.

Naproti tomu nebyly dosud odvozeny odhady veličin b_n a (nezvrhlá) limitní rozložení x_n; rovněž nebyla zodpověděna otázka — kterou kladou KW v [9] — o optimální volbě konstant a_n, c_n. Částečné řešení těchto problémů je podáno v následujících odstavcích tohoto článku. Předpoklady KW methody jsou modifikovány tak, aby bylo možno použít Chungovy myšlenky důkazu.

Rozlišuji opět dva případy; v prvním — „quasi-parabolickém“ — jsou předpoklady (B′), (C′), (D′) nahrazeny jediným předpokladem

(E′) $\quad K_0\,|x - \Theta| \leqq |M'(x)| \leqq K_1\,|x - \Theta| \qquad$ pro $-\infty < x < +\infty$

a je dokázána konvergence $x_n \to \Theta$ podle kvadratického středu. (Konvergence neplyne z dříve uvedených vět, neboť předpoklady (E′) a (C′) se navzájem vylučují.)

Pro posloupnosti $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ typu $a_n = \frac{a}{n^\alpha}$, $c_n = \frac{c}{n^\gamma}$, kde $\alpha = 1 \Rightarrow a > \frac{1}{4K_0}$, jsou odvozeny horní řádové odhady veličin b_n a je dokázáno, že volba $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{4}$, která dává odhad $b_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$, je optimální v následujícím smyslu: Jestliže buďto $\alpha \neq 1$ nebo $\gamma \neq \frac{1}{4}$, potom existuje systém $\{H(y)|x)\}$, splňující

(A′), (E′) a takový, že $b_n = O^{-1}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right)$ pro nějaké $\varepsilon > 0$. Za dodatečného předpokladu

(F′) $|M'''(x)| \leqq Q$ pro $-\infty < x < +\infty$

je optimální volba $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{6}$, která dává odhad $b_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)$; za dodatečného předpokladu

(G′) $M^{(2k+1)}(\Theta) = 0$, $\quad |M^{(2k+2)}(x)| \leqq A^{2k+1}(2k+1)!$
pro $-\infty < x < +\infty$, $k = 1, 2, \ldots$

existuje k libovolnému $\varepsilon > 0$ takové γ_0, že $(\alpha = 1, \gamma = \gamma_0) \Rightarrow b_n = O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)$.

Jsou-li splněny předpoklady (A′), (E′) a dále

(H′) $\sigma^2(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \, dH(y|x)$ je spojitá a kladná v nějakém okolí Θ,

(I′) pro každé sudé $p > 2$ existuje K_p tak, že

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^p \, dH(y|x) \leqq K_p \qquad \text{pro } -\infty < x < +\infty$$

a nastává-li některý ze tří případů: 1° $\gamma \geqq \frac{1}{4}\alpha$ a v nějakém okolí Θ existuje spojitá $M''(x) < 0$, 2° $\gamma > \frac{1}{6}\alpha$ a platí (F′), 3° platí (G′), potom náhodné proměnné $n^{\frac{1}{2}(\alpha-2\gamma)}(x_n - \Theta)$ jsou asymptoticky normální se střední hodnotou 0 a s rozptylem $\frac{\sigma_\Theta^2 a}{2mc^2}$ pro $\alpha < 1$, $\frac{\sigma_\Theta^2 a^2}{(2ma - \frac{1}{2} + \gamma)\, c^2}$ pro $\alpha = 1$, kde $\sigma_\Theta^2 = \sigma^2(\Theta)$, $m = |M''(\Theta)|$.

Druhý případ — ohraničených odchylek od regresní funkce — je charakterisován předpokladem

(A″) $M(x)$ je rostoucí (klesající) pro $x < \Theta$ $(x > \Theta)$,
existuje $C > 0$ tak, že $\int\limits_{M(x)-C}^{M(x)+C} dH(y|x) = 1$ pro $-\infty < x < +\infty$,
existuje omezený interval $\langle A, B\rangle$ takový, že
$$1° \ \Theta \in (A, B), \ 2° \ x \text{ non} \in \langle A, B\rangle \Rightarrow H(y|x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } y \leqq M(x), \\ 1 \text{ pro } y > M(x), \end{cases}$$

dále předpoklady (C′), (D′) a lokálně (pro $|x - \Theta| \leqq \delta$) vysloveným předpokladem (E′). Poslední předpoklad je splněn zejména tehdy, když existuje $M''(\Theta) < 0$. Speciální tvar distribučních funkcí $H(y|x)$ pro x non $\in \langle A, B\rangle$ není omezením, jestliže je předem známo, že $\Theta \in (A, B)$; potom lze totiž $H(y|x)$ a $M(x)$ změnit vně intervalu $\langle A, B\rangle$ ve shodě s (A″) a ostatními předpoklady.

Za předpokladů (A″), (C′), (D′) a (E′) platí (s nepatrnou změnou) všechna tvrzení, dokázaná pro první případ; rovněž předpoklady (F′), (G′) stačí vyslovit v tomto případě jen lokálně; předpoklad (I′) je již obsažen v (A″).

V práci používám těchto symbolů a úmluv:

Jsou-li $f(n)$ a $g(n) > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ dvě posloupnosti, potom symbol $f(n) = O(g(n))$ značí, že $\limsup_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{g(n)} < +\infty$ (může být i nula); symbol $f(n) = O^{-1}(g(n))$ značí, že $\liminf_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{g(n)} > 0$ (může být i $+\infty$). Symbolu „o" používám jen ve spojení $f(n) = o(1)$, t. j. $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$. Je-li s přirozené číslo, potom značím $(2s - 1)!! = (2s - 1)(2s - 3) \ldots 3.1$.

Píši-li rovnost (nerovnost) mezi náhodnými proměnnými, rozumím tím vždy rovnost (nerovnost) s pravděpodobností 1, aniž to výslovně připomínám. (Některé rovnosti v textu platí ovšem jistě; rozlišovat mezi oběma případy je však zbytečné vzhledem k tomu, že všechny věty obsahují pouze tvrzení o středních hodnotách.)

V definici x_{n+1} předpokládám (jak se mlčky činí i ve zmíněných pracích o RM a KW methodě), že náhodné proměnné y_n požadovaných vlastností existují. Tento předpoklad znamená jisté omezení na distribuční funkce $H(y \mid x)$ [2]; k jeho splnění stačí, aby pro každé y byla $H(y \mid x)$ borelovsky měřitelná funkce x.

2. KW methoda v případě „quasi-parabolické" regrese

Pro každé reálné x nechť $H(y|x)$ je distribuční funkce. Regresní funkce $M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, \mathrm{d}H(y|x)$ nechť je konečná, rostoucí pro $x < \Theta$ a klesající pro $x > \Theta$.

Učiňme předpoklady

(I) $\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \, \mathrm{d}H(y)|x) \leqq \sigma^2$ pro $-\infty < x < +\infty$;

(II) $K_0 |x - \Theta| \leqq |M'(x)| \leqq K_1 |x - \Theta|$ pro $-\infty < x < +\infty$;

(σ^2, K_0, K_1 jsou kladné konstanty).

Nechť $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ jsou posloupnosti kladných čísel, nechť

$$c_n \to 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^2 < +\infty. \tag{1}$$

Budiž x_1 libovolná konstanta (nebo náhodná proměnná, která má konečné momenty všech řádů). Pro $n \geqq 1$ položme

$$x_{n+1} = x_n + a_n \frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n},$$

[2]) Upozornil na to O. Hanš ve svém sdělení na IV. sjezdu čs. matematiků.

kde y_{2n} a y_{2n-1} jsou náhodné proměnné, jež pro daná $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, \ldots, y_{2n-2}$ mají po řadě distribuční funkce $H(y \mid x_n + c_n)$, $H(y \mid x_n - c_n)$, a jsou nezávislé.

Věta 1. *Za předpokladů* (I), (II) *a* (1) *konverguje* $x_n \to \Theta$ *podle kvadratického středu.*

Důkaz. Pro x reálné a $c > 0$ položme $M_c(x) = \dfrac{M(x+c) - M(x-c)}{c}$; dále položme

$$\varkappa_\Theta(x) = \frac{-M'(x)}{x - \Theta} \text{ pro } x \neq \Theta,\ \varkappa_\Theta(\Theta) = K_0 .$$

Vzhledem k (II) a vzhledem k monotonii $M(x)$ pro $x < \Theta$ a $x > \Theta$ jest

$$K_0 \leqq \varkappa_\Theta(x) \leqq K_1 \text{ pro } -\infty < x < +\infty .$$

Dále jest

$$M_c(x) = M'(x + \vartheta_1 c) + M'(x - \vartheta_2 c) = -\varkappa_\Theta(x + \vartheta_1 c)(x + \vartheta_1 c - \Theta) - \\ - \varkappa_\Theta(x - \vartheta_2 c)(x - \vartheta_2 c - \Theta) = -\{\varkappa_\Theta(x + \vartheta_1 c) + \varkappa_\Theta(x - \vartheta_2 c)\} . \\ . (x - \Theta) + \{\vartheta_2 \varkappa_\Theta(x - \vartheta_2 c) - \vartheta_1 \varkappa_\Theta(x + \vartheta_1 c)\} c = -K_{\Theta,c}(x)(x - \Theta) + \\ + G_{\Theta,c}(x)\, c ,$$

kde

$$0 < \vartheta_i < 1, \quad i = 1, 2, \quad 2K_0 \leqq K_{\Theta,c}(x) \leqq 2K_1 , \quad |G_{\Theta,c}(x)| < K_1 . \tag{2}$$

Jest tedy

$$(x - \Theta) M_c(x) = -K_{\Theta,c}(x)(x - \Theta)^2 + cG_{\Theta,c}(x)(x - \Theta) ,$$

$$-2K_1(x - \Theta)^2 - K_1 c|x - \Theta| \leqq (x - \Theta) M_c(x) \leqq -2K_0(x - \Theta)^2 + \\ + K_1 c\, |x - \Theta| , \tag{3}$$

$$0 \leqq M_c^2(x) \leqq 2\{K_{\Theta,c}^2(x)(x - \Theta)^2 + c^2 G_{\Theta,c}^2(x)\} < \\ < 8K_1^2(x - \Theta)^2 + 2K_1^2 c^2 . \tag{4}$$

Z monotonie funkce $M(x)$ pro $x < \Theta$ a $x > \Theta$ a ze spojitosti v bodě $x = \Theta$ následuje platnost implikace $(x - \Theta) M_c(x) > 0 \Rightarrow |x - \Theta| < c$; z této implikace a z pravé větve nerovnosti (3) vyplývá nerovnost $(x - \Theta) M_c(x) < K_1 c^2$.

Z definice náhodných proměnných x_n plyne

$$(x_{n+1} - \Theta)^2 = (x_n - \Theta)^2 + 2a_n(x_n - \Theta) \frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n} + a_n^2 \left(\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^2 .$$

Vypočtěme podmíněné střední hodnoty výrazů

$$\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n} , \quad \left(\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^2$$

za předpokladu x_n. Píšeme-li $y_{2n} - y_{2n-1} = (y_{2n} - M(x_n + c_n)) - (y_{2n-1} - M(x_n - c_n)) + (M(x_n + c_n) - M(x_n - c_n))$, dostaneme

$$\mathsf{E}\left[\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n} \mid x_n\right] = M_{c_n}(x_n) ,$$

a vzhledem k nezávislosti y_{2n}, y_{2n-1}

$$\mathsf{E}\left[\left(\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^2 \Big| \, x_n\right] = \frac{\sigma^2(x_n + c_n) + \sigma^2(x_n - c_n)}{c_n^2} + M_{c_n}^2(x_n) \,.$$

Odtud a v dalším řádku postupně dle (5), (I) a (4):

$$\mathsf{E}\,[(x_{n+1} - \Theta)^2 \mid x_n] =$$

$$= (x_n - \Theta)^2 + 2a_n(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n) + a_n^2 \frac{\sigma^2(x_n + c_n) + \sigma^2(x_n - c_n)}{c_n^2} + a_n^2 M_{c_n}^2(x_n) \leqq$$

$$\leqq (x_n - \Theta)^2 + 2K_1 a_n c_n^2 + 2\sigma^2 a_n^2 c_n^{-2} + 8K_1^2 a_n^2 (x_n - \Theta)^2 + 2K_1^2 a_n^2 c_n^2 \,. \qquad (6)$$

Označíme-li jako b_{n+1} nepodmíněnou střední hodnotu

$$\mathsf{E}[(x_{n+1} - \Theta)^2] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[(x_{n+1} - \Theta)^2 | x_n]] \,, \qquad (b_1 = \mathsf{E}[(x_1 - \Theta)^2]) \,,$$

dostáváme

$$b_{n+1} \leqq q_n b_n + w_n \,, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

kde

$$q_n = 1 + 8K_1^2 a_n^2, \quad w_n = 2K_1 a_n c_n^2 + 2\sigma^2 a_n^2 c_n^{-2} + 2K_1^2 a_n^2 c_n^2 \,.$$

Odtud

$b_{n+1} \leqq b_1 \prod_{k=1}^{n} q_k + \sum_{k=1}^{n} w_k \prod_{j=k+1}^{n} q_j$, $n = 1, 2, \ldots$, kde symbol $\prod_{j=n+1}^{n} q_j$ značí 1. Dle předpokladu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje a tedy také $\prod_{k=1}^{\infty} q_k$ konverguje; z ostatních předpokladů o a_n, c_n vyplývá, že také $\sum_{k=1}^{\infty} w_k \prod_{j=k+1}^{\infty} q_j$ konverguje. Ježto $q_n > 1$, jest

$$b_{n+1} \leqq b_1 \prod_{k=1}^{\infty} q_k + \sum_{k=1}^{\infty} w_k \prod_{j=k+1}^{\infty} q_j \,, \quad \text{t. j.} \quad b_n \leqq B^2, \quad n = 1, 2, \ldots \,. \qquad (7)$$

Ze známé nerovnosti $\mathsf{E}[|z|] \leqq \sqrt{\mathsf{E}[z^2]}$ plyne:

$$\mathsf{E}[|x_n - \Theta|] \leqq B, \qquad n = 1, 2, \ldots \,. \qquad (8)$$

Z rovnosti (6) dostáváme použitím pravých větví nerovností (3), (4):

$$\mathsf{E}[(x_{n+1} - \Theta)^2 | x_n] \leqq (x_n - \Theta)^2 - 4K_0 a_n (x_n - \Theta)^2 + 2K_1 a_n c_n |x_n - \Theta| +$$
$$+ 2\sigma^2 a_n^2 c_n^{-2} + 8K_1^2 a_n^2 (x_n - \Theta)^2 + 2K_1^2 a_n^2 c_n^2 \,. \qquad (9)$$

Utvoříme-li na obou stranách střední hodnoty a užijeme-li (7), (8), dostaneme $b_{n+1} \leqq q_n' b_n + w_n'$, $n = 1, 2, \ldots$, kde $q_n' = 1 - 4K_0 a_n$, $w_n' = 2K_1 B a_n c_n + 2\sigma^2 a_n^2 c_n^{-2} + 8K_1^2 B^2 a_n^2 + 2K_1^2 a_n^2 c_n^2$. Pro všechna $n \geqq n_0$ je $q_n' > 0$ (neboť $a_n \to 0$). Nechť $N \geqq n_0$; indukcí se snadno ověří, že $b_{n+1} \leqq b_N \prod_{k=N}^{n} q_k' + \sum_{k=N}^{n} w_k' \cdot \prod_{j=k+1}^{n} q_j'$, $n = N, N + 1, \ldots$. Z (1) plyne, že $\prod_{k=N}^{\infty} q_k'$ diverguje k nule (při tom součiny $\prod_{j=k+1}^{n} q_j'$ jsou vesměs nejvýš rovny 1), a že $\sum_{k=N}^{\infty} w_k'$ konverguje. K libovolnému

$\varepsilon > 0$ zvolme $N_0 \geqq n_0$ tak, že $\sum_{k=N_0}^{\infty} w'_k < \frac{1}{2}\varepsilon$, a $n_1 > N_0$ tak, že $\prod_{k=N_0}^{n_1} q'_k < \frac{\varepsilon}{2B^2}$; potom $b_{n+1} < \varepsilon$ pro všechna $n \geqq n_1$. To jest, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, c. b. d.

V dalším budeme vyšetřovat rychlost konvergence $b_n \to 0$. Omezíme se na případ, kdy konstanty a_n, c_n jsou typu

$$a_n = \frac{a}{n^\alpha}, \quad c_n = \frac{c}{n^\gamma}. \tag{10}$$

Z (1) vyplývá:

$$\tfrac{3}{4} < \alpha \leqq 1, \quad 1 - \alpha < \gamma < \alpha - \tfrac{1}{2}, \quad a > 0, \quad c > 0; \tag{11}$$

jestliže $\alpha = 1$, pak budeme předpokládat, že

$$a > \frac{1}{4K_0}. \tag{12}$$

K řádovým odhadům veličin b_n použijeme následujících lemmat, která odvodil Chung [7].

Lemma 1. *Nechť $\{b_n\}$ je posloupnost reálných čísel; pro všechna $n \geqq n_0$ nechť platí*

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{c}{n^s}\right) b_n + \frac{c'}{n^t}, \tag{13}$$

kde $0 < s < 1$, $s < t$, $c > 0$, $c' > 0$. Potom

$$\limsup_{n\to\infty} n^{t-s} b_n \leqq \frac{c'}{c}. \tag{14}$$

Lemma 2. *Nechť $\{b_n\}$ je posloupnost reálných čísel; pro všechna $n \geqq n_0$ nechť platí*

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{c}{n}\right) b_n + \frac{c'}{n^{p+1}}, \tag{15}$$

kde $c > p > 0$, $c' > 0$. Potom

$$b_n \leqq \frac{c'}{c-p} \cdot \frac{1}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{p+1}} + \frac{1}{n^c}\right). \tag{16}$$

Lemma 1 platí i tehdy, zaměníme-li v (13) a (14) současně „$\leqq$" na „$\geqq$" a „$\limsup_{n\to\infty}$" na „$\liminf_{n\to\infty}$". Lemma 2 platí i tehdy, zaměníme-li v (15) a (16) současně „$\leqq$" na „$\geqq$". Na tato tvrzení se budeme odvolávat jako na **lemma 3**, resp. **4**. Dokážeme nyní

větu 2. *Za předpokladů* (I), (II) *a* (10), (11), (12) *platí*

$$b_n = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n^{2\gamma}}\right), & \textit{když } \gamma < \tfrac{1}{4}\alpha, \\[2ex] O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-2\gamma}}\right), & \textit{když } \gamma \geqq \tfrac{1}{4}\alpha. \end{cases}$$

Poznámka. Případ $\gamma < \frac{1}{4}\alpha$ může (vzhledem k (11)) nastat jen tehdy, je-li $\frac{4}{5} < \alpha \leqq 1$.

Důkaz věty 2. Utvoříme-li opět střední hodnoty na obou stranách nerovnosti (9) a užijeme-li (7) na předposlední člen vpravo, dostaneme

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{4K_0a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{2K_1ac}{n^{\alpha+\gamma}} \mathsf{E}\,[|x_n - \Theta|] + \frac{2\sigma^2a^2c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}} + + \frac{8K_1^2B^2a^2}{n^{2\alpha}} + \frac{2K_1^2a^2c^2}{n^{2\alpha+2\gamma}} \,. \tag{17}$$

Platí nerovnost

$$\mathsf{E}\,[|x_n - \Theta|] = \int_{|x_n-\Theta|\leqq\varepsilon_n} |x_n - \Theta|\, \mathrm{dP} + \int_{|x_n-\Theta|>\varepsilon_n} |x_n - \Theta|\, \mathrm{dP} \leqq$$

$$\leqq \varepsilon_n \mathsf{P}[|x_n - \Theta| \leqq \varepsilon_n] + \frac{1}{\varepsilon_n} \int_{|x_n-\Theta|>\varepsilon_n} (x_n - \Theta)^2\, \mathrm{dP} \leqq \varepsilon_n + \frac{1}{\varepsilon_n} b_n \tag{18}$$

pro libovolné $\varepsilon_n > 0$; položme $\varepsilon_n = \dfrac{2K_1c}{\varepsilon K_0 n^\gamma}$ $(0 < \varepsilon < 4)$ a dosaďme do (17). Pro $n > n_0(\eta)$ dostáváme

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{(4-\varepsilon)\,K_0a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{4K_1^2K_0^{-1}\varepsilon^{-1}ac^2}{n^{\alpha+2\gamma}} + \frac{(2+\eta)\,\sigma^2a^2c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}} \,,$$

kde η je libovolné kladné číslo.

Posloupnost $\{b_n\}$ zřejmě vyhovuje předpokladům lemmatu 1, resp. 2. (Ježto $a > \dfrac{1}{4K_0}$ dle (12), lze volit ε tak, aby $(4 - \varepsilon)\,K_0a > \mathrm{Max}\,(2\gamma, 1 - 2\gamma)$.) Použitím těchto lemmat plyne tvrzení věty 2.

Věta 3. *Platí-li* (I), (II) *a je-li* $a_n = \dfrac{a}{n}$, $c_n = \dfrac{c}{n^{\frac{1}{4}}}$, $a > \dfrac{1}{4K_0}$, *potom* $b_n = O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$. *Tato volba* $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ *je optimální v následujícím smyslu: Jestliže* $a_n' = \dfrac{a'}{n^{\alpha'}}$, $c_n' = \dfrac{c'}{n^{\gamma'}}$ *splňují* (10), (11), (12) *a jestliže buďto* $\alpha' \neq 1$ *nebo* $\gamma' \neq \frac{1}{4}$, *potom existuje systém* $\{H(y|x)\}$, *splňující* (I), (II), *pro nějž* $b_n = O^{-1}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right)$, *kde* $\varepsilon > 0$.

Důkaz. Dokážeme, že pro každou přípustnou dvojici α, γ existuje systém $\{H(y|x)\}$, pro nějž platí tvrzení věty 2 i tehdy, nahradíme-li symbol „O" symbolem „O^{-1}". Tím bude dokázána i věta 3.

1) Nechť $\gamma \geqq \frac{1}{4}\alpha$. Učiňme předpoklad

$$\sigma^2(x) \geqq \sigma_0^2 > 0 \quad \text{pro} \quad -\infty < x < +\infty \,. \tag{19}$$

Vyjděme z rovnosti (6). Použitím (19) a levých větví nerovností (3), (4) dostáváme

$$\mathsf{E}\,[(x_{n+1} - \Theta)^2|x_n] \geqq (x_n - \Theta)^2 - 4K_1a_n(x_n - \Theta)^2 - - 2K_1a_nc_n|x_n - \Theta| + 2\sigma_0^2a_n^2c_n^{-2} \,;$$

odtud

$$b_{n+1} \geqq \left(1 - \frac{4K_1 a}{n^\alpha}\right) b_n - \frac{2K_1 ac}{n^{\alpha+\gamma}} \mathsf{E}[|x_n - \Theta|] + \frac{2\sigma_0^2 a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}} . \tag{20}$$

Položme v nerovnosti (18)

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon \sigma_0^2 a}{2K_1 c^3 n^\gamma} , \quad 0 < \varepsilon < 2 ,$$

a dosaďme do (20); dostaneme

$$b_{n+1} \geqq \left(1 - \frac{4K_1 a + 4K_1^2 c^4 \varepsilon^{-1} \sigma_0^{-2}}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{(2 - \varepsilon)\, \sigma_0^2 a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}} ,$$

neboť $\alpha + 2\gamma \geqq 2\alpha - 2\gamma$. Dle lemmatu 3 resp. 4 jest $b_n = O^{-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-2\gamma}}\right)$.

2) Nechť $\gamma < \frac{1}{4}\alpha$. Nechť $\{H(y|x)\}$ je systém takový, že

$$M(x) = \begin{cases} - \ (x - \Theta)^2 & \text{pro} \quad x \leqq \Theta , \\ - \frac{1}{2}(x - \Theta)^2 & \text{pro} \quad x > \Theta . \end{cases} \tag{21}$$

Předpoklad (II) je zřejmě splněn s konstantami $K_0 = 1$, $K_1 = 2$. Předpoklad (I) nechť je splněn s konstantou $\sigma^2 = 1$. Nechť pro jednoduchost

$$\Theta = 0 . \tag{22}$$

Vyjdeme-li z rovnosti (6) a užijeme-li pravé větve nerovnosti (4) a odhadů věty 2, dostaneme snadno nerovnosti

$$b_{n+1} \leqq b_n + \frac{2a}{n^\alpha} \mathsf{E}[x_n M_{c_n}(x_n)] + \frac{(2 + \eta)\, a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}} , n > n_0(\eta) , \quad \eta > 0 , \tag{23}$$

$$b_{n+1} \geqq b_n + \frac{2a}{n^\alpha} \mathsf{E}[x_n M_{c_n}(x_n)] , \quad n = 1, 2, \dots . \tag{24}$$

Odvodíme nejprve nerovnosti pro $\mathsf{E}[x_n M_{c_n}(x_n)]$. Pro x reálné a $c > 0$ jest dle (21), (22):

$$M_c(x) = \begin{cases} - 4x & \text{pro} \quad x \leqq - c , \\ \frac{1}{2c} x^2 - 3x + \frac{1}{2} c & \text{pro} \quad - c < x < c , \\ - 2x & \text{pro} \quad x \geqq c ; \end{cases} \tag{25}$$

$$xM_c(x) = \left\{\begin{matrix} - 4x^2 \\ \frac{1}{2c} x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2} cx \\ - 2x^2 \end{matrix}\right\} \leqq - 2x^2 + c^2 ; \tag{26}$$

dále

$$xM_c(x) = - 4x^2 + x^2 \left(1 + \frac{1}{2c} x\right) \chi_{(-c,c)}(x) + \tfrac{1}{2} cx \chi_{(-c,c)}(x) + 2x^2 \chi_{\langle c,+\infty)}(x) ,$$

kde 2. člen vpravo je $\geqq 0$ a 4. člen je $\geqq \frac{1}{2} x^2 \chi_{\langle c,+\infty)}(x) \geqq \frac{1}{2} cx \chi_{\langle c,+\infty)}(x)$; odtud

$$xM_c(x) \geqq - 4x^2 + \tfrac{1}{2} cx \chi_{(-c,+\infty)}(x) \geqq - 4x^2 + \tfrac{1}{2} cx . \tag{27}$$

Z (26) a (27) vyplývá

$$\mathsf{E}[x_n M_{c_n}(x_n)] \leqq -2b_n + \frac{c^2}{n^{2\gamma}}, \tag{28}$$

$$\mathsf{E}[x_n M_{c_n}(x_n)] \geqq -4b_n + \frac{c}{2n^\gamma}\,\mathsf{E}[x_n]. \tag{29}$$

Dosaďme (28) do (23); ježto $\alpha + 2\gamma < 2\alpha - 2\gamma$, dostaneme

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{4a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{(2+\eta')\,ac^2}{n^{\alpha+2\gamma}} \quad \text{pro} \quad n > n_0(\eta')\,, \quad \eta' > 0\,.$$

Vzhledem k libovolnosti $\eta' > 0$ jest dle lemmatu 1 (2):

$$\limsup_{n\to\infty} n^{2\gamma} b_n \leqq \begin{cases} \frac{1}{2}c^2 & \text{pro } \alpha < 1\,, \\ \dfrac{2ac^2}{4a - 2\gamma} = qc^2 & \text{pro } \alpha = 1\,. \end{cases}$$

Ježto $\frac{1}{2} < q < 1$ (neboť $\gamma < \frac{1}{4} < a$), je v obou případech

$$b_n \leqq \frac{q'c^2}{n^{2\gamma}} \quad \text{pro } n > n_0(q'),\ q < q' < 1\,.$$

Z Čebyševovy nerovnosti plyne

$$\mathsf{P}\left[|x_n| \geqq \frac{c}{n^\gamma}\right] \leqq \frac{b_n n^{2\gamma}}{c^2} \leqq q',\ \text{t. j. } \mathsf{P}\left[|x_n| < \frac{c}{n^\gamma}\right] \geqq 1 - q' = p' \tag{30}$$

pro $n > n_0(q')$. Z definice náhodných proměnných x_n pak vyplývá

$$\mathsf{E}[x_{n+1}] = \mathsf{E}[x_n] + \frac{a}{n^\alpha}\,\mathsf{E}[M_{c_n}(x_n)]\,. \tag{31}$$

Dle (25) jest $M_{c_n}(x_n) \geqq -3x_n + \frac{1}{2}c_n \chi_{(-c_n,\,c_n)}(x_n)$; s použitím (30) jest

$$\mathsf{E}[M_{c_n}(x_n)] \geqq -3\mathsf{E}[x_n] + \frac{p'c}{2n^\gamma}$$

pro $n > n_0(q')$. Dosazením do (31) dostaneme

$$\mathsf{E}[x_{n+1}] \geqq \left(1 - \frac{3a}{n^\alpha}\right) \mathsf{E}[x_n] + \frac{\frac{1}{2}p'ac}{n^{\alpha+\gamma}} \quad \text{pro } n > n_0(q')\,.$$

Dle lemmatu 3 (4) je

$$\liminf_{n\to\infty} n^\gamma\,\mathsf{E}[x_n] \geqq \begin{cases} \frac{1}{6}p'c & \text{pro } \alpha < 1\,, \\ \dfrac{\frac{1}{2}p'ac}{3a - \gamma} > \frac{1}{6}p'c & \text{pro } \alpha = 1\,. \end{cases}$$

V obou případech tedy

$$\mathsf{E}[x_n] > \frac{p'c}{7n^\gamma} \tag{32}$$

pro $n > n_1$ (nějaké). (32) umožňuje zpřesnit nerovnost (29):

$$\mathsf{E}[x_n M_{c_n}(x_n)] \geqq -4b_n + \frac{p'c^2}{14n^{2\gamma}}$$

pro $n > n_1$. Dosazením do (24) dostaneme

$$b_{n+1} \geqq \left(1 - \frac{8a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{p'ac^2}{7n^{\alpha+2\gamma}}$$

pro $n > n_1$, a dle lemmatu 3 (4)

$$\liminf_{n\to\infty} n^{2\gamma} b_n \geqq \frac{p'c^2}{56} > 0\,, \quad \text{t. j.} \quad b_n = O^{-1}\left(\frac{1}{n^{2\gamma}}\right).$$

Obor čísel γ, pro něž $b_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-2\gamma}}\right)$, lze rozšířit připojením dalších předpokladů o funkci $M(x)$. Učiňme předpoklad

(III) $|M'''(x)| \leqq Q$ pro $-\infty < x < +\infty$ a pro nějaké $Q > 0$.

Potom platí:

Věta 4. *Za předpokladů* (I), (II), (III) *a* (10), (11), (12) *jest*

$$b_n = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n^{4\gamma}}\right) & \textit{pro} \quad \gamma < \frac{1}{6}\alpha\,, \\ O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-2\gamma}}\right) & \textit{pro} \quad \gamma \geqq \frac{1}{6}\alpha\,. \end{cases}$$

Zejména tedy platí $b_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)$ *pro* $a_n = \frac{a}{n}$, $c_n = \frac{c}{n^{\frac{1}{6}}}$, $a > \frac{1}{4K_0}$. *Tato volba konstant* a_n, c_n *je optimální v následujícím smyslu: Jestliže* $\{a_n'\}$, $\{c_n'\}$ *splňují* (10), (11), (12) *a jestliže buďto* $\alpha' \neq 1$ *nebo* $\gamma' \neq \frac{1}{6}$, *potom existuje systém* $\{H(y|x)\}$ *splňující* (I), (II), (III), *pro nějž*

$$b_n = O^{-1}\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}-\varepsilon}}\right), \quad \textit{kde } \varepsilon > 0.$$

Důkaz. Pro x reálné a $c > 0$ je za předpokladů (II), (III)

$$M_c(x) = 2M'(x) + \tfrac{1}{6}c^2\{M'''(x + \vartheta_1 c) + M'''(x - \vartheta_2 c)\}\,,$$

t. j.

$$M_c(x) = -2\varkappa_\Theta(x)(x - \Theta) + \tfrac{1}{6}c^2 Q_{\Theta,c}(x)\,,$$

kde

$$|Q_{\Theta,c}(x)| \leqq 2Q\,. \tag{33}$$

Odtud

$$(x - \Theta)\,M_c(x) \leqq -2K_0(x - \Theta)^2 + \tfrac{1}{3}Qc^2\,|x - \Theta|\,. \tag{34}$$

Použijeme-li v rovnosti (6) nerovností (34), (I), (4), utvoříme pak střední hodnoty a použijeme (7), dostaneme

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{4K_0 a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{\frac{2}{3}Qac^2}{n^{\alpha+2\gamma}}\,\mathsf{E}\,[|x_n - \Theta|] + \frac{(2+\eta)\,\sigma^2 a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}} \tag{35}$$

pro $n > n_0(\eta)$, $\eta > 0$. Položme v nerovnosti (18)

$$\varepsilon_n = \frac{2Qc^2}{3K_0\varepsilon n^{2\gamma}}\,,$$

kde $0 < \varepsilon < 4$ je takové, že $a > \frac{1}{(4-\varepsilon) K_0}$, a dosaďme do (35):

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{(4-\varepsilon) K_0 a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{\frac{4}{9} Q^2 K_0^{-1} \varepsilon^{-1} a c^4}{n^{\alpha + 4\gamma}} + \frac{(2+\eta)\, \sigma^2 a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha - 2\gamma}}$$

pro $n > n_0(\eta)$, $\eta > 0$. Lemma 1 (2) dává pak výsledek.

Důkaz optimality provedeme stručně; je obdobný důkazu věty 3. Pro $\gamma \geqq \frac{1}{6}\alpha$ stačí opět předpoklad $\sigma^2(x) \geqq \sigma_0^2 > 0$ pro $-\infty < x < +\infty$ k tomu, aby $b_n = O^{-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha - 2\gamma}}\right)$. Pro $\gamma < \frac{1}{6}\alpha$ položme (jest $\Theta = 0$)

$$M(x) = \begin{cases} -Lx^2 + x^3 & \text{pro } |x| \leqq \bar{\delta} \quad (L > 0,\ 0 < \bar{\delta} < 1)\,, \\ -Lx^2 & \text{pro } |x| \geqq 1 \end{cases}$$

a pro $\bar{\delta} < |x| < 1$ definujme $M(x)$ tak, aby pro všechna x byly splněny předpoklady (II), (III) a předpoklad monotonie. To lze na př. pomocí Lagrange-Silvestrova interpolačního polynomu a vhodnou volbou $L > 0$. Pro $|x| + c < \bar{\delta}$, $c > 0$, jest

$$M_c(x) = -4Lx + 6x^2 + 2c^2\,. \tag{36}$$

Další krok důkazu se opírá o lemma 5, jež bude dokázáno později; předpoklady tohoto lemmatu nechť jsou splněny. Potom

$$\mathsf{E}\,[x_n M_{c_n}(x_n)] = \int_{|x_n| \leqq \delta} x_n M_{c_n}(x_n)\, \mathrm{dP} + O\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

pro libovolné $\delta > 0$ a $q > 0$; obdobný vztah platí i pro $\mathsf{E}\,[M_{c_n}(x_n)]$. Odtud a dle (36) platí pro $0 < \delta_0 < \frac{1}{2}\bar{\delta}$ a $c_n < \delta_0$ (t. j. pro $n > n_0(\delta_0)$):

$$\mathsf{E}\,[x_n M_{c_n}(x_n)] \geqq -4Lb_n - 6\delta_0 b_n + 2c_n^2\, \mathsf{E}\,[x_n] + O\left(\frac{1}{n^q}\right); \tag{37}$$

$$\mathsf{E}\,[M_{c_n}(x_n)] \geqq -4L\, \mathsf{E}\,[x_n] + 2c_n^2 + O\left(\frac{1}{n^q}\right).$$

Dosadíme-li poslední nerovnost do (31) a použijeme lemmatu 3 (4), dostaneme

$$\mathsf{E}\,[x_n] \geqq \frac{c^2}{3Ln^{2\gamma}}$$

pro $n \geqq n_1$. Tuto nerovnost dosaďme do (37), a (37) do (24). ((24) i (31) platí obecně — pokud $\Theta = 0$). Lemma 3 (4) pak dává

$$b_n = O^{-1}\left(\frac{1}{n^{4\gamma}}\right).$$

Učiňme konečně předpoklad

(IV) $M^{(2k+1)}(\Theta) = 0\,, \quad |M^{(2k+2)}(x)| \leqq A^{2k+1}(2k+1)!$
pro $-\infty < x < +\infty$, $k = 1, 2, \ldots$ a pro nějaké $A > 0$.

Věta 5. *Za předpokladů* (I), (II), (IV) *a* (10), (11), (12) *platí*

$$b_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-2\gamma}}\right).$$

Poznámka. K libovolnému $\varepsilon > 0$ lze tedy volbou $a_n = \frac{a}{n}$, $c_n = \frac{c}{n^{\frac{1}{2}\varepsilon}}$, $a > \frac{1}{4K_0}$ dosáhnouti toho, že $b_n = O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)$.

Důkaz věty 5. Budiž x reálné a $0 < c < \frac{1}{A\sqrt{2}}$. Potom

$$M(x + c) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} M^{(k)}(x), \quad M(x - c) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c^k}{k!} M^{(k)}(x)$$

jsou absolutně konvergentní řady a je tedy

$$M_c(x) = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c^{2j}}{(2j+1)!} M^{(2j+1)}(x) =$$

$$= \left\{- 2\varkappa_\Theta(x) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c^{2j}}{(2j+1)!} M^{(2j+2)}(\Theta + \vartheta_j(x - \Theta))\right\}(x - \Theta),$$

kde

$$2 \sum_{j=1}^{\infty} \leqq 2 \sum_{j=1}^{\infty} c^{2j} A^{2j+1} = 2A \frac{c^2 A^2}{1 - c^2 A^2} < 4A^3 c^2. \tag{38}$$

Odtud

$$(x_n - \Theta) M_{c_n}(x_n) \leqq -(2 - \eta) K_0 (x_n - \Theta)^2 \tag{39}$$

pro $n > n_0(\eta)$, $0 < \eta < 2$.

Použijeme-li (39) v rovnosti (6), dostaneme obdobně jako dříve

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{(4 - \eta') K_0 a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{(2 + \eta'') \sigma^2 a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha - 2\gamma}}$$

pro $n > n_0(\eta', \eta'')$, $\eta' > 0$, $\eta'' > 0$, odkud plyne výsledek.

Za jistých dodatečných předpokladů lze dokázat asymptotickou normalitu náhodných proměnných x_n. K tomu cíli odvodíme nejprve řádové odhady absolutních momentů $\beta_n^{(r)} = \mathsf{E}[|x_n - \Theta|^r]$ všech řádů.

Vyslovme předpoklad

(V) pro každé sudé $p > 2$ existuje $K_p > 0$ tak, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^p \, dH(y|x) \leqq K_p \quad \text{pro} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Věta 6. *Nechť platí* (I), (II), (V) *a* (10), (11), (12). *Nastává-li jeden z případů* $1°\ \gamma \geqq \frac{1}{4}\alpha$, $2°\ \gamma \geqq \frac{1}{6}\alpha$ *a platí* (III), $3°$ *platí* (IV), *potom* $\beta_n^{(r)} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{r}{2}(\alpha-2\gamma)}}\right)$

pro $r = 1, 2, \ldots$ (40); *jestliže* 4° $\gamma < \frac{1}{4}\alpha$, *potom* $\beta_n^{(r)} = O\left(\frac{1}{n^{r\gamma}}\right)$ *pro* $r = 1, 2, \ldots$; *jestliže* 5° $\gamma < \frac{1}{6}\alpha$ *a platí* (III), *potom* $\beta_n^{(r)} = O\left(\frac{1}{n^{2r\gamma}}\right)$ *pro* $r = 1, 2, \ldots$.

Důkaz. Uvažujme případ 1°. Pro $r = 2$ platí (40) podle věty 2. Budiž $r > 2$ sudé. Vyslovme indukční předpoklad:

$$\limsup_{n\to\infty} n^{\frac{t}{2}(\alpha-2\gamma)} \beta_n^{(t)} < B_t \quad \text{pro } 2 \leqq t \leqq r - 2$$

a pro nějaké $B_t > 0$. Z definice náhodných proměnných x_n vyplývá

$$(x_{n+1} - \Theta)^r = \left(x_n - \Theta + a_n \frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^r;$$

odtud

$$\beta_{n+1}^{(r)} = \beta_n^{(r)} + ra_n \, \mathsf{E}\,[(x_n - \Theta)^{r-1} M_{c_n}(x_n)] + \sum_{t=2}^{r} \binom{r}{t} J_t, \tag{41}$$

kde

$$J_t = a_n^t \, \mathsf{E}\left[(x_n - \Theta)^{r-t}\left(\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^t\right].$$

Jest

$$J_2 \leqq a_n^2 \, \mathsf{E}[(x_n - \Theta)^{r-2}\{2\sigma^2 c_n^2 + M_{c_n}^2(x_n)\}] \leqq \frac{2\sigma^2 a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}} \cdot \frac{B_{r-2}}{n^{\frac{r-2}{2}(\alpha-2\gamma)}} +$$

$$+ \frac{8K_1^2 a^2}{n^{2\alpha}} \beta_n^{(r)} + \frac{2K_1^2 a^2 c^2}{n^{2\alpha+2\gamma}} \cdot \frac{B_{r-2}}{n^{\frac{r-2}{2}(\alpha-2\gamma)}} \leqq \frac{(2+\eta')\, B_{r-2}\sigma^2 a^2 c^{-2}}{n^{\alpha+\frac{r}{2}(\alpha-2\gamma)}} + \frac{8K_1^2 a^2}{n^{2\alpha}} \beta_n^{(r)} \tag{42}$$

pro $n > n_0(\eta')$, $\eta' > 0$. (Použili jsme (4) a indukčního předpokladu.) S použitím (2) a nerovnosti $|a + b + c|^t \leqq 3^t(|a|^t + |b|^t + |c|^t)$ odhadneme výraz

$$\mathsf{E}\left[\left|\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right|^t x_n\right] \leqq 2 \,.\, 3^t K_t c_n^{-t} + 3^t\,|M_{c_n}(x_n)|^t \leqq 2 \,.\, 3^t K_t c_n^{-t} +$$
$$+ (12K_1)^t |x_n - \Theta|^t + (6K_1)^t c_n^t.$$

Zde K_t pro t lichá, $t \geqq 3$, značí konstanty, jež ohraničují momenty $\int_{-\infty}^{\infty} |y - M(x)|^t \mathrm{d}H(y|x)$; existence těchto konstant plyne z (V) a z Ljapunovovy nerovnosti.

Odtud pro $3 \leqq t \leqq r - 2$

$$|J_t| \leqq \frac{(2+\eta)\, 3^t K_t a^t c^{-t}}{n^{t\alpha-t\gamma}} \cdot \frac{B_{r-t}}{n^{\frac{r-t}{2}(\alpha-2\gamma)}} + \frac{(12K)^t a^t}{n^{t\alpha}} \beta_n^{(r)} \leqq \frac{(2+\eta)\, B_{r-t}\, 3^t K_t a^t c^{-t}}{n^{\frac{t}{2}\alpha+\frac{r}{2}(\alpha-2\gamma)}} +$$

$$+ \frac{(12K_1)^t a^t}{n^{t\alpha}} \beta_n^{(r)}$$

pro $n > n_0(\eta)$, t. j.

$$|J_t| = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\beta_n^{(r)}. \tag{43}$$

Snadno se zjistí, že odhad (43) platí i pro J_{r-1} a J_r. Dle (2) jest

$$\mathsf{E}\,[(x_n - \Theta)^{r-1}\, M_{c_n}(x_n)] \leqq -\, 2K_0\beta_n^{(r)} + K_1 c_n \beta_n^{(r-1)}.$$

Platí nerovnost

$$\beta_n^{(r-1)} \leqq \varepsilon_n \beta_n^{(r-2)} + \frac{1}{\varepsilon_n}\beta_n^{(r)} \tag{44}$$

pro libovolné $\varepsilon_n > 0$. Položme $\varepsilon_n = \dfrac{K_1 K_0^{-1}\varepsilon^{-1}c}{n^\gamma}$, kde $\varepsilon > 0$ volíme tak, aby $(2 - \varepsilon)\, K_0\, a > \frac{1}{2} - \gamma$; to lze vzhledem k (12). Dostáváme

$$\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^{r-1}\, M_{c_n}(x_n)] \leqq -\,(2 - \varepsilon)\, K_0\beta_n^{(r)} + \frac{K_1^2 K_0^{-1}\varepsilon^{-1}c}{n^{2\gamma}}\,\beta_n^{(r-2)};$$

odtud

$$ra_n\,\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^{r-1}\, M_{c_n}(x_n)] \leqq -\,\frac{(2 - \varepsilon)\, K_0 ra}{n^\alpha}\,\beta_n^{(r)} + \frac{K_1^2 K_0^{-1} B_{r-2}\varepsilon^{-1} rac^2}{n^{4\gamma + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}}. \tag{45}$$

Dosazením (42), (43), (45) do (41) dostáváme (vzhledem k tomu, že $4\gamma \geqq \alpha$)

$$\beta_{n+1}^{(r)} \leqq \left(1 - \frac{(2 - \eta'')\, K_0 ra}{n^\alpha}\right)\beta_n^{(r)} + \frac{\binom{r}{2}(2 + \eta')\, B_{r-2}\sigma^2 a^2 c^{-2} + K_1^2 K_0^{-1} B_{r-2}\varepsilon^{-1} rac^2}{n^{\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}} \tag{46}$$

pro $n > n_0(\eta', \eta'')$, $\eta'' > 0$, $\eta' > \varepsilon > 0$. Odtud vyplývá

$$\limsup_{n\to\infty} n^{\frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}\,\beta_n^{(r)} < B_r$$

pro nějaké $B_r > 0$. Konečně ze známé nerovnosti (vynechávám index n

$$(\beta^{(r-1)})^{\frac{1}{r-1}} \leqq (\beta^{(r)})^{\frac{1}{r}}$$

plyne (40) i pro $t = r - 1$ a $t = 1$.

V případě 2° platí (40) pro $r = 2$ podle věty 4. Předchozí důkaz lze pak opakovat s tím rozdílem, že používáme vztahů (33), (34) místo (2), (3). Výsledné nerovnosti (42), (43) platí beze změny; v (44) položíme

$$\varepsilon_n = \frac{\frac{1}{3}QK_0^{-1}\varepsilon^{-1}c^2}{n^{2\gamma}};$$

poslední člen v (45) pak přejde ve výraz

$$\frac{\frac{1}{9}Q^2K_0^{-1}B_{r-2}\varepsilon^{-1}rac^4}{n^{6\gamma + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}}.$$

Ježto $6\gamma \geqq \alpha$, platí opět (až na konstanty v čitateli 2. členu) nerovnost (46) a tím i odhad (40).

Rovněž v případech 3°, 4°, 5° lze důkaz provést obdobně jako v případě 1°, s příslušnými změnami.

Důsledkem věty 6 jest:

Lemma 5. *Za předpokladů* (I), (II), (V) *a* (10), (11), (12) *jest*

$$\int\limits_{|x_n - \Theta| > \delta} |x_n - \Theta|^r \, \mathrm{dP} = O\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

pro každé $\delta > 0$, $r \geqq 0$, $q > 0$.

Důkaz.

$$\int\limits_{|x_n - \Theta| > \delta} |x_n - \Theta|^r \, \mathrm{dP} \leqq \delta^{-t} \int\limits_{|x_n - \Theta| > \delta} |x_n - \Theta|^{r+t} \, \mathrm{dP} \leqq \delta^{-t} \beta_n^{(r+t)} =$$

$$= \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{r+t}{2}(\alpha - 2\gamma)}}\right) & \text{pro } \gamma \geqq \dfrac{1}{4}\alpha\,, \\ O\left(\dfrac{1}{n^{(r+t)\gamma}}\right) & \text{pro } \gamma < \dfrac{1}{4}\alpha\,. \end{cases}$$

Nyní stačí volit t tak, že

$$\frac{r+t}{2}(\alpha - 2\gamma) \geqq q\,, \text{ resp. } (r+t)\gamma \geqq q\,.$$

Učiňme předpoklad

(VI) funkce $\sigma^2(x)$ je spojitá v bodě Θ; $\sigma^2(\Theta) = \sigma_\Theta^2 > 0$.

Nyní již můžeme přistoupit k důkazu asymptotické normality náhodných proměnných x_n.

Věta 7. *Platí-li* (I), (II), (V), (VI) *a nastává-li jeden z případů* 1° $\gamma \geqq \frac{1}{4}\alpha$ *a v nějakém okolí bodu* Θ *existuje spojitá* $M''(x) < 0$, 2° $\gamma > \frac{1}{6}\alpha$ *a platí* (III), 3° *platí* (IV), *potom limitní rozložení náhodných proměnných* $n^{\frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma)}(x_n - \Theta)$ *je normální se střední hodnotou* 0 *a s rozptylem* $\dfrac{\sigma_\Theta^2 a}{2mc^2}$ *pro* $\alpha < 1$, *resp.* $\dfrac{\sigma_\Theta^2 a^2}{(2ma - \frac{1}{2} + \gamma)c^2}$ *pro* $\alpha = 1$, *kde* $m = -M''(\Theta)$.

Poznámka. Na rozdíl od věty 6 není ve 2° zahrnut případ $\gamma = \frac{1}{6}\alpha$.

Důkaz věty 7. Označme $b_n^{(r)} = \mathrm{E}\,[x_n - \Theta)^r]$, $r = 1, 2, \ldots$; tedy $b_n^{(2)} = b_n$. Jak známo (viz na př. [10], str. 111—112), stačí dokázat, že

$$\lim_{n \to \infty} n^{\frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)} b_n^{(r)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } r = 2s - 1\,, \\ \left(\dfrac{\sigma_\Theta^2 a}{2mc^2}\right)^s (2s-1)!! & \text{pro } r = 2s,\ \alpha < 1\,, \\ \left(\dfrac{\sigma_\Theta^2 a^2}{(2ma - \frac{1}{2} + \gamma)\,c^2}\right)^s (2s-1)!! & \text{pro } r = 2s,\ \alpha = 1\,, \end{cases}$$

$$s = 1, 2, \ldots\,. \tag{47}$$

1) Uvažujme nejprve případ 1°. Nechť $x + c$, $x - c$ $(c > 0)$ náležejí do intervalu, v němž existuje $M''(x)$. Potom jest

$$M_c(x) = 2M'(x) + \tfrac{1}{2}c\{M''(x + \vartheta_1 c) - M''(x - \vartheta_2 c)\},$$

kde $0 < \vartheta_i < 1$, $i = 1, 2$. Jak plyne z 1°, je $M''(x)$ stejnoměrně spojitá v nějakém uzavřeném intervalu $\langle \Theta - \delta, \Theta + \delta \rangle$; existuje tedy k libovolnému $\eta > 0$ číslo $0 < \delta_1 < \delta$ tak, že

$$(|x - \Theta| \leqq \delta - \delta_1,\ 0 < c < \delta_1) \Rightarrow \tfrac{1}{2}\,|M''(x + \vartheta_1 c) - M''(x - \vartheta_2 c)| \leqq \eta .$$

Dále jest $M'(x) = M'(\Theta) + (x - \Theta)\,M''(\Theta) + o(|x - \Theta|)$, $M'(\Theta) = 0$; existuje tedy $\delta_2 > 0$ tak, že $|x - \Theta| \leqq \delta_2 \Rightarrow |M'(x) - (x - \Theta)\,M''(\Theta)| \leqq \frac{1}{2}\eta|x - \Theta|$. Položme $\delta_0 = \text{Min}\,(\delta - \delta_1, \delta_2)$. Celkem pro $|x - \Theta| \leqq \delta_0$, $0 < c \leqq \delta_1$ dostáváme

$$M_c(x) = -\,2m(x - \Theta) + \eta_x^{(1)}(x - \Theta) + \eta_x^{(2)}c\,, \tag{48}$$

kde $m = -\,M''(\Theta)$ a $\eta_x^{(1)}$, $\eta_x^{(2)}$ (a v dalším $\eta_x^{(3)}$, $\eta_x^{(4)}$) značí funkce x (a také c), pro něž $|\eta_x^{(i)}| \leqq \eta$ pro $|x - \Theta| \leqq \delta_0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Písmena $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{11}$ značí v dalším čísla (mohou být i nekladná) taková, že $|\eta_i| \leqq \eta$, $i = 1, 2, \ldots, 11$. Tvrzení (47) dokážeme nyní indukcí. V celém důkazu budeme předpokládat, že $c_n \leqq \delta_1$, t. j. že $n > n_0(\delta_1)$.

2) Nechť $r = 1$. Dle (31) jest $b_{n+1}^{(1)} = b_n^{(1)} + a_n\mathsf{E}\,[M_{c_n}(x_n)]$. Dle (3) a lemmatu 5 a dále dle (48) jest

$$\mathsf{E}\,[M_{c_n}(x_n)] = \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} M_{c_n}(x_n)\,\mathrm{dP} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) = -\,2m \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} (x_n - \Theta)\,\mathrm{dP} +$$

$$+ \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} \eta_{x_n}^{(1)}(x_n - \Theta)\,\mathrm{dP} + c_n \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} \eta_{x_n}^{(2)}\,\mathrm{dP} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) =$$

$$= -\,2mb_n^{(1)} + \eta_1\beta_n^{(1)} + \eta_2 c_n + O\left(\frac{1}{n^q}\right).$$

Odtud a dle věty 6 je pro dostatečně velká n

$$b_{n+1}^{(1)} = \left(1 - \frac{2ma}{n^\alpha}\right) b_n^{(1)} + \frac{\eta_3 B_1 a}{n^{\alpha + \frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma)}} + \frac{\eta_2 ac}{n^{\alpha + \gamma}} + O\left(\frac{1}{n^q}\right).$$

Ježto $\frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma) \leqq \gamma$, jest

$$|b_{n+1}^{(1)}| \leqq \left(1 - \frac{2ma}{n^\alpha}\right) |b_n^{(1)}| + \frac{\eta(B_1 a + ac + o(1))}{n^{\alpha + \frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma)}}.$$

Dle lemmatu 1 (2) (posledního smíme použíti, neboť $m \geqq K_0$ a $a > \dfrac{1}{4K_0}$ dle předpokladu)

$$\limsup_{n \to \infty} n^{\frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma)}\,|b_n^{(1)}| \leqq \frac{\eta(B_1 + c)}{2m} \quad \text{resp.} \quad \frac{\eta(B_1 + c)\,a}{2ma - \frac{1}{2} + \gamma},$$

a vzhledem k libovolnosti $\eta > 0$

$$\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma)}\,b_n^{(1)} = 0\,. \tag{49}$$

3) Nechť $r = 2$. Nechť δ_0 je už voleno tak, že také

$$|x - \Theta| \leqq \delta_0 + \delta_1 \Rightarrow |\sigma^2(x) - \sigma_\Theta^2| \leqq \tfrac{1}{2}\eta \,. \tag{50}$$

Podle (6) jest

$$b_{n+1} = b_n + 2a_n \mathsf{E}\,[(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n)] + \frac{a_n^2}{c_n^2}\,\mathsf{E}\,[\sigma^2(x_n + c_n) + \sigma^2(x_n - c_n)] +$$

$$+ a_n^2 \mathsf{E}\,[M_{c_n}^2(x_n)] = b_n + 2a_n E_1 + \frac{a_n^2}{c_n^2} E_2 + a_n^2 E_3 \,. \tag{51}$$

Podobně jako ad 2) dostáváme

$$E_1 = \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} (x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n)\,\mathrm{dP} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) = -\,2m \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} (x_n - \Theta)^2\,\mathrm{dP} +$$

$$+ \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} \eta_{x_n}^{(1)}(x_n - \Theta)^2\,\mathrm{dP} + c_n \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} \eta_{x_n}^{(2)}(x_n - \Theta)\,\mathrm{dP} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) =$$

$$= -\,(2m + \eta_4)\, b_n + \eta_5 c_n \beta_n^{(1)} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) = -\,(2m + \eta_4)\, b_n + \frac{\eta_6 B_1 c}{n^{\gamma + \frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma)}} + O\left(\frac{1}{n^q}\right);$$

$$E_2 = \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} \{\sigma^2(x_n + c_n) + \sigma^2(x_n - c_n)\}\,\mathrm{dP} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) = 2\sigma_\Theta^2 + \eta_7 + O\left(\frac{1}{n^q}\right);$$

konečně dle (4) jest $E_3 = o(1)$. Dosazením do (51) dostaneme

$$b_{n+1} = \left(1 - \frac{(4m + 2\eta_4)\, a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{(2\sigma_\Theta^2 + \eta_7)\, a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha - 2\gamma}} + \frac{2\eta_6 B_1 a c + o(1)}{n^{\frac{3}{2}\alpha}} \,.$$

Vzhledem k nerovnosti $2\alpha - 2\gamma \leqq \frac{3}{2}\alpha$ a vzhledem k libovolnosti $\eta > 0$ obdržíme pomocí lemmat 1 — 4:

$$\lim_{n \to \infty} n^{\alpha - 2\gamma}\, b_n = \begin{cases} \dfrac{\sigma_\Theta^2 a}{2mc^2} & \text{pro } \alpha < 1 \,, \\[2ex] \dfrac{\sigma_\Theta^2 a^2}{(2ma - \frac{1}{2} + \gamma)\, c^2} & \text{pro } \alpha = 1 \,. \end{cases} \tag{52}$$

4) Nechť $r > 2$. Pro $r > 2$ platí (srv. (41))

$$b_{n+1}^{(r)} = b_n^{(r)} + r a_n \mathsf{E}\,[(x_n - \Theta)^{r-1}\, M_{c_n}(x_n)] + \sum_{t=2}^{r} \binom{r}{t} J_t \,, \tag{53}$$

kde

$$J_t = a_n^t \mathsf{E}\left[(x_n - \Theta)^{r-t} \left(\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^t\right].$$

Podobně jako ad 2), 3) odvodíme

$$\mathsf{E}\,[(x_n - \Theta)^{r-1}\, M_{c_n}(x_n)] = -\,2m \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} (x_n - \Theta)^r\,\mathrm{dP} +$$

$$+ \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} \eta_{x_n}^{(1)}(x_n - \Theta)^r\,\mathrm{dP} + c_n \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} \eta_{x_n}^{(2)}(x_n - \Theta)^{r-1}\,\mathrm{dP} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) =$$

$$= -\,2m b_n^{(r)} + \frac{\eta_8 B_r}{n^{\frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}} + \frac{\eta_9 B_{r-1} c}{n^{\gamma + \frac{r-1}{n}(\alpha - 2\gamma)}} + O\left(\frac{1}{n^q}\right); \tag{54}$$

$$J_2 = a_n^2 \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} (x_n - \Theta)^{r-2} \left\{ \frac{2\sigma_\Theta^2 + \eta_{x_n}^{(3)}}{c_n^2} + M_{c_n}^2(x_n) \right\} \mathrm{dP} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) =$$

$$= \frac{2\sigma_\Theta^2 a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha - 2\gamma}} b_n^{(r-2)} + \frac{\eta_{10} B_{r-2} a^2 c^{-2} + o(1)}{n^{\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}} . \tag{55}$$

Dle (43) jest

$$J_t = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}}\right) \text{ pro } 3 \leqq t \leqq r . \tag{56}$$

Dosaďme nyní (54), (55), (56) do (53) a současně položme jako indukční předpoklad $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{r-2}{2}(\alpha - 2\gamma)} b_n^{(r-2)} = B_{r-2}^* \geqq 0$, kde $B_{r-2}^* = B_{r-2}^*(\alpha, \gamma)$. Dostáváme tak pro $n > n_0(\eta)$

$$b_{n+1}^{(r)} = \left(1 - \frac{2mra}{n^\alpha}\right) b_n^{(r)} + \frac{\eta_2 B_r ra}{n^{\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}} + \frac{\eta_3 B_{r-1} rac}{n^{\frac{1}{2}\alpha + 2\gamma + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}} +$$

$$+ \frac{\sigma_\Theta^2 (B_{r-2}^* + \eta_{11})\, r(r-1)\, a^2 c^{-2}}{n^{\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}} + \frac{\eta_{10} B_{r-2} \frac{1}{2} r(r-1)\, a^2 c^{-2} + o(1)}{n^{\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}} .$$

Jestliže $B_{r-2}^* > 0$, potom vzhledem k nerovnosti $\frac{1}{2}\alpha + 2\gamma \geqq \alpha$ a vzhledem k libovolnosti $\eta > 0$ platí

$$b_{n+1}^{(r)} \lesseqqgtr \left(1 - \frac{2mra}{n^\alpha}\right) b_n^{(r)} + \frac{r(r-1)\, (B_{r-2}^* \pm \varepsilon)\, \sigma_\Theta^2 a^2 c^{-2}}{n^{\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}}$$

pro libovolné $\varepsilon > 0$ a všechna $n > n_1(\varepsilon)$; odtud

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)} b_n^{(r)} = B_r^* = \begin{cases} (r-1)\, B_{r-2}^* \dfrac{\sigma_\Theta^2 a}{2mc^2} & \text{pro } \alpha < 1 , \\ (r-1)\, B_{r-2}^* \dfrac{\sigma_\Theta^2 a^2}{(2ma - \frac{1}{2} + \gamma)\, c^2} & \text{pro } \alpha = 1 . \end{cases}$$

Jestliže $B_{r-2}^* = 0$, potom

$$|b_{n+1}^{(r)}| \leqq \left(1 - \frac{2mra}{n^\alpha}\right) |b_n^{(r)}| + \frac{\varepsilon}{n^{\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}}$$

pro $\varepsilon > 0$, $n > n_2(\varepsilon)$, a odtud $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)} b_n^{(r)} = B_r^* = 0$. Poněvadž dle (49) a (52) je indukční předpoklad splněn pro $r = 1$ a $r = 2$, při čemž $B_1^* = 0$, $B_2^* = \dfrac{\sigma_\Theta^2 a}{2mc^2}$ pro $\alpha < 1$ resp. $B_2^* = \dfrac{\sigma_\Theta^2 a^2}{(2ma - \frac{1}{2} + \gamma)\, c^2}$ pro $\alpha = 1$, je tím v případě 1° tvrzení (47) dokázáno.

5) V případě 2° a 3° lze vést důkaz stejně jako v případě 1° s tím rozdílem, že místo (48) použijeme v případě 2° vztahu $M_c(x) = -2m(x-\Theta) + \eta_x^{(1)} \cdot (x-\Theta) + Q_{x,c}c^2$, kde $|Q_{x,c}| \leqq \frac{1}{3}Q$, pro $|x-\Theta| \leqq \delta_0(\eta)$, a v případě 3° vztahu

$$M_c(x) = -2m(x-\Theta) + \eta_x^{(4)}(x-\Theta) \quad \text{pro} \quad |x-\Theta| \leqq \delta_0(\eta).$$

Tyto vztahy vyplývají z (33) a (38).

3. KW methoda v případě ohraničených odchylek od regresní funkce

Nechť $H(y|x)$, $M(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$; $x_n, y_{2n}, y_{2n-1}, a_n, c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, mají týž význam jako v odstavci 2. Předpoklady (I), (II) nahraďme však předpoklady

(VII) existuje konečný interval $\langle A, B\rangle$ tak, že

1° $\Theta \in (A, B)$;

2° x non $\in \langle A, B\rangle \Rightarrow H(y|x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad y \leqq M(x), \\ 1 & \text{pro} \quad y > M(x); \end{cases}$

(VIII) existuje konstanta $C > 0$ tak, že

$$\int_{M(x)-C}^{M(x)+C} \mathrm{d}H(y|x) = 1 \quad \text{pro} \quad -\infty < x < +\infty;$$

(IX) existují $\bar{\delta} > 0$, $K_0 > 0$, $K_1 > 0$ tak, že

$$K_0\,|x-\Theta| \leqq |M'(x)| \leqq K_1\,|x-\Theta| \quad \text{pro} \quad |x-\Theta| \leqq \bar{\delta};$$

(X) existují $\varrho > 0$, $R > 0$ tak, že

$$|x' - x''| < \varrho \Rightarrow |M(x') - M(x'')| < R;$$

(XI) k libovolnému $\delta > 0$ existuje $\pi(\delta) > 0$ tak, že

$$|x-\Theta| > \delta \Rightarrow \inf_{\frac{1}{2}\delta > \varepsilon > 0} \frac{|M(x+\varepsilon) - M(x-\varepsilon)|}{\varepsilon} > \pi(\delta).$$

Dále nechť $x_1 \in \langle A, B\rangle$.

Poznámka. Splnění předpokladu (VII) můžeme dosáhnout zejména tehdy, když $H(y|x)$ splňují (VIII) — (XI) v nějakém konečném intervalu $\langle A, B\rangle$, o němž víme, že obsahuje Θ jako vnitřní bod, a když známe nějaký dolní odhad hodnot $M(A)$ a $M(B)$. (Tento případ v praktických úlohách zřejmě často nastává.) Potom lze totiž změnit distribuční funkce $H(y|x)$ pro x ležící vně $\langle A, B\rangle$ a stanovit je ve shodě s předpoklady (VII) — (XI).

Předpoklad (IX) je ovšem podstatně slabší než předpoklad (II) odst. 2.; je splněn zejména tehdy, když existuje $M''(\Theta) < 0$. Předpoklady (VII) — (XI) představují (na rozdíl od předpokladů (I), (II)) speciální případ původního případu Kiefer-Wolfowitzova; odtud plyne konvergence $x_n \to \Theta$ s pravděpodobností 1.

Položme

$$q = \sup_{n=1,2,\dots} \frac{a_n}{c_n}, \quad q' = \sup_{n=1,2,\dots} c_n,$$

$$A_0 = A - q' - q(2C + R), \quad B_0 = B + q' + q(2C + R).$$

Předpokládejme, že $q' < \frac{1}{2}\varrho$; to lze bez újmy obecnosti: platí-li totiž (X), pak existují čísla $\varrho' > 0$, $R' > 0$, která rovněž vyhovují (X) a taková, že $q' < \frac{1}{2}\varrho'$.

Lemma 6. *Za předpokladů* (VII) — (XI) *jest*

$$A_0 \leqq x_n \leqq B_0 \quad pro \quad n = 1, 2, \dots . \tag{57}$$

Důkaz. Pro $n = 1$ platí (57) dle předpokladu. Budiž nyní $n > 1$ pevné.

1) Nechť $A - q' \leqq x_n \leqq B + q'$. Jest

$$x_{n+1} = x_n + \frac{a_n}{c_n}(y_{2n} - y_{2n-1}),$$

kde

$$|y_{2n} - y_{2n-1}| \leqq 2C + R \text{ (dle (VIII) a (X))};$$

odtud

$$A - q' - q(2C + R) \leqq x_{n+1} \leqq B + q' + q(2C + R),$$

t. j.

$$A_0 \leqq x_{n+1} \leqq B_0 .$$

2) Nechť buďto $x_n < A - q'$ nebo $x_n > B + q'$. Potom dle (VII):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{a_n}{c_n}\{M(x_n + c_n) - M(x_n - c_n)\};$$

ježto $A - q' < \Theta - c_n$, $B + q' > \Theta + c_n$ — a tedy $x_n \pm c_n < \Theta$ v prvním a $x_n \pm c_n > \Theta$ v druhém případě — a ježto $M(x)$ je rostoucí (klesající) pro $x < \Theta$ $(x > \Theta)$, jest v prvním případě $x_n < x_{n+1} < A - q' + qR < B_0$ a v druhém $x_n > x_{n+1} > B + q' - qR > A_0$. Dle indukčního předpokladu je však $A_0 \leqq x_n \leqq B_0$; tedy i $A_0 \leqq x_{n+1} \leqq B_0$.

Lemma 7. *Za předpokladů* (VII) — (XI) *existuje konstanta $K > 0$ a přirozené číslo n_0 tak, že*

$$(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n) \leqq -K(x_n - \Theta)^2 + K_1 c_n |x_n - \Theta| \quad pro \ n \geqq n_0 . \tag{58}$$

Důkaz. Dle (IX) jest pro $|x - \Theta| + c < \bar{\delta}$, $(c > 0)$

$$(x - \Theta)\, M_c(x) \leqq -2K_0(x - \Theta)^2 + K_1 c\, |x - \Theta| .$$

Budiž $n_0 = n_0(\frac{1}{3}\bar{\delta})$ index, od něhož počínaje jest $c_n < \frac{1}{3}\bar{\delta}$; potom

$$(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n) \leqq -2K_0(x_n - \Theta)^2 + K_1 c_1 |x_n - \Theta| \tag{59}$$

pro $n \geqq n_0$ a $|x_n - \Theta| \leqq \frac{2}{3}\bar{\delta}$.

Pro $n \geqq n_0$ a $|x_n - \Theta| > \frac{2}{3}\bar{\delta}$ je však dle (XI)

$$|M_{c_n}(x_n)| \geqq \inf_{\frac{1}{3}\bar{\delta} > \varepsilon > 0} \frac{|M(x_n + \varepsilon) - M(x_n - \varepsilon)|}{\varepsilon} > \pi\left(\frac{2}{3}\bar{\delta}\right).$$

Označme $D_0 = \text{Max}\,(|A_0 - \Theta|, |B_0 - \Theta|)$; dle lemmatu 6 jest

$$\frac{|x_n - \Theta|}{D_0} \leqq 1 \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \ldots$$

a tedy

$$|M_{c_n}(x_n)| \geqq \frac{\pi(\frac{2}{3}\bar{\delta})}{D_0} |x_n - \Theta| \quad \text{pro} \quad n \geqq n_0 \quad \text{a} \quad |x_n - \Theta| > \frac{2}{3}\bar{\delta}\,.$$

Vzhledem k nerovnostem $c_n < \frac{1}{3}\bar{\delta}$, $|x_n - \Theta| > \frac{2}{3}\bar{\delta}$ a vzhledem k monotonii $M(x)$ pro $x \lesseqgtr \Theta$ jsou výrazy $(x_n - \Theta)$ a $M_{c_n}(x_n)$ opačného znaménka a tudíž

$$(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n) \leqq -\frac{\pi(\frac{2}{3}\bar{\delta})}{D_0}(x_n - \Theta)^2 \quad \text{pro} \quad n \geqq n_0 \quad \text{a} \quad |x_n - \Theta| > \frac{2}{3}\bar{\delta}\,. \tag{60}$$

Spojením (59) a (60) dostáváme pro $n \geqq n_0$ nerovnost (58), kde

$$K = \text{Min}\left(\frac{\pi(\frac{2}{3}\bar{\delta})}{D_0}, \quad 2K_0\right).$$

Vyslovme ještě dodatečné předpoklady

(XII) $|M'''(x)| \leqq Q$ pro $|x - \Theta| \leqq \bar{\delta}$;

(XIII) $M^{(2k+1)}(\Theta) = 0\,,\quad |M^{(2k+2)}(x)| < A^{2k+1}(2k + 1)!$

pro $|x - \Theta| \leqq \bar{\delta}\,,\quad k = 1, 2, \ldots$ a pro nějaké $A > 0$.

Jako (12a) označme implikaci $\alpha = 1 \Rightarrow a > \dfrac{1}{2K}$.

Nyní již můžeme vyslovit hlavní tvrzení tohoto odstavce.

Věta 8. *Věty* 1—7 (*odstavce* 2) *platí i tehdy, když současně nahradíme*

předpoklady (I), (II) — *předpoklady* (VII) — (XI),
předpoklad (III) — *předpokladem* (XII),
předpoklad (IV) — *předpokladem* (XIII),
předpoklad (12) — *předpokladem* (12a),

$\left(\textit{resp. nerovnost } a > \dfrac{1}{4K_0} \;-\; \textit{nerovností } a > \dfrac{1}{2K}\right)$,[3])

vynecháme předpoklad (V), *a vše ostatní ponecháme beze změny.*

Důkazy vět 1—7 za nových předpokladů jsou obdobné důkazům uvedeným v odstavci 2. Omezíme se proto na vytčení některých odlišností.

K větě 1: Konvergence $x_n \to \Theta$ podle kvadratického středu plyne z konvergence $x_n \to \Theta$ s pravděpodobností 1 a z lemmatu 6.

K větě 2: Místo nerovnosti (3) používáme (jako všude v dalším) nerovnosti (58). Místo (I) a (4) užíváme nerovnosti

$$\mathsf{E}\left[\left(\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^2\right] \leqq c_n^{-2}\,(2C^2 + R^2)\,, \tag{61}$$

která plyne z (VIII) a (X).

[3]) Jde o konstantu K, vystupující v (58).

K větě 3: K důkazu použijeme lemmatu 5, které (jak později ukážeme) platí i v tomto případě a které umožňuje omezit se při vyšetřování středních hodnot jistých náhodných proměnných na integrační obory typu $|x_n - \Theta| \leqq \delta$, $\delta > 0$. Rozdílnost proti důkazu v odstavci 2 záleží pak v tom, že splnění (19), resp. (21) požadujeme jen v nějakém okolí Θ; dle (IX) platí v tomto okolí (3) i (4), a tedy i jejich důsledky.

K větě 4 a 5: Jako v důkazu lemmatu 7 zjistíme, že

$$(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n) \leqq -K(x_n - \Theta)^2 + \tfrac{1}{3}Qc_n^2\, |x_n - \Theta| \quad \text{pro } n \geqq n_0\,,$$

resp.

$$(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n) \leqq -(K - \eta)\,(x_n - \Theta)^2 \quad \text{pro} \quad n > n_1(\eta)\,.$$

V důkazu optimality je třeba jen triviálních změn.

K větě 6: K odhadu výrazu

$$\mathsf{E}\left[\left|\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right|^t\right]$$

používáme nerovnosti

$$|y_{2n} - y_{2n-1}| \leqq 2C + {}^{\cdot}R\,.$$

Předpoklad (V) není třeba výslovně uvádět: je zřejmě splněn dle (VIII). Důsledkem věty 6 je opět lemma 5.

K větě 7: Lemma 5 umožňuje omezit se při vyšetřování středních hodnot na integrační obory $|x_n - \Theta| \leqq \delta_0$, $\delta_0 > 0$. V určitém okolí bodu Θ lze však zpřesnit vztah (58) takto: K libovolnému $\eta > 0$ existuje $\delta_0 > 0$ tak, že pro $|x - \Theta| + c < \delta_0$ $(c > 0)$ jest $M_c(x) = -2m(x - \Theta) + \eta_x^{(5)}(x - \Theta) + \eta_x^{(6)}c$, kde $|\eta_x^{(i)}| \leqq \eta$, $i = 5, 6$. Podobně lze zpřesnit ostatní vztahy, na př. (61):

$$a_n^2\mathsf{E}\left[\left(\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^2\right] = \frac{(2\sigma_\Theta^2 + \eta_{12})\, a^2c^{-2}}{n^{2\alpha - 2\gamma}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right),$$

kde $|\eta_{12}| \leqq \eta$. Nerovnost $4ma > 1 - 2\gamma$ je splněna, neboť $a > \dfrac{1}{2K}$ dle (12a) a $m \geqq K_0 \geqq \dfrac{1}{2}K$ dle definice K. Předpoklad (VI) je ve znění věty podstatný.

Poznámka. V době, kdy byl tento článek v tisku, vyšla práce: C. Derman, An application of Chung's lemma to the Kiefer-Wolfowitz stochastic approximation procedure, Annals Math. Stat. *27* (1956), s. 532—536. Výsledky této práce jsou zformulovány ve dvě věty, jež jsou podobné — co do předpokladů i co do tvrzení — větě 5 a větě 7, případ 3°, našeho článku.

LITERATURA

Zkratka: AMS — Annals of Mathematical Statistics.

[1] *H. Robbins, S. Monro:* A stochastic approximation method, AMS *22* (1951), 400—407.

[2] *J. Wolfowitz:* On the stochastic approximation method of Robbins and Monro, AMS *23* (1952), 457—461.

[3] *J. R. Blum:* Approximation methods which converge with probability one, AMS *25* (1954), 382—386.

[4] *G. Kallianpur:* A note on the Robbins-Monro stochastic approximation method, AMS *25* (1954), 386—388.

[5] *L. Schmetterer:* Bemerkungen zum Verfahren der stochastischen Iteration, Österreichisches Ingenieur-Archiv *VII* (1953), 111—117.

[6] *L. Schmetterer:* Zum Sequentialverfahren von Robbins und Monro, Monatshefte für Mathematik *58* (1954), 33—37.

[7] *K. L. Chung:* On a stochastic approximation method, AMS *25* (1954), 463—483.

[8] *J. R. Blum:* Multidimensional stochastic approximation methods, AMS *25* (1954), 737—744.

[9] *J. Kiefer, J. Wolfowitz:* Stochastic estimation of the maximum of a regression function, AMS *23* (1952), 462—466.

[10] *M. G. Kendall:* The Advanced Theory of Statistics, vol. I., Griffin, London 1943.

Резюме

ОБ АППРОКСИМАЦИОННОМ МЕТОДЕ КИФЕРА-ВОЛЬФОВИЦА

ВАЦЛАВ ДУПАЧ (Václav Dupač), Прага.

(Поступило в редакцию 20/I 1956 г.)

В статье установливаются асимптотические свойства аппроксимационного метода Кифера-Вольфовица [9] для отыскания значения $x = \Theta$, в котором функция регрессии $M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, \mathrm{d}H(y|x)$ достигает своего максимума. Условия этого метода видоизменены таким образом, что можно воспользоваться аналитическими средствами, приведенными в работе Чжуна [7]. Различаются два варианта. В варианте, рассматриваемом в § 3-ем, приняты все предположения из [9] и некоторые усилены: вместо (2.8) — из [9] — предполагается выполнение неравенства

$$K_0|x - \Theta| \leqq |M'(x)| \leqq K_1|x - \Theta| \,, \quad K_0 > 0 \,, \quad K_1 > 0$$

в некоторой окрестности Θ; вместо (2.2) предполагается знание ограниченного, содержащего Θ промежутка (A, B) вместе с нижними оценками значений $M(A)$, $M(B)$ и выполнение условия $\int_{M(x)-C}^{M(x)+C} \mathrm{d}H(y|x) = 1$ для всех $x \in \langle A, B\rangle$. Постоянные a_n, c_n предполагаются в виде $a_n = \frac{a}{n^\alpha}$, $c_n = \frac{c}{n^\gamma}$, и доказывается, что подбор $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{4}$ (где $c > 0$ и a больше некоторой постоянной) является наилучшим, обеспечивая, что $\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^2] = O(n^{-\frac{1}{2}})$;

всякий другой подбор α, γ может вести к менее выгодному результату. Если дополнительно предположить существование ограниченной $M'''(x)$ в некоторой окрестности Θ, то лучшим является подбор $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{6}$, дающий $\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^2] = O(n^{-\frac{2}{3}})$; если в некоторой окрестности Θ функция $M(x)$ — аналитическая и симметричная относительно Θ, то $\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^2] = O(n^{-(1-\varepsilon)})$ для $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon$ и для произвольного $\varepsilon > 0$. При дополнительном условии, что $\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \, \mathrm{d}H(y|x)$ непрерывна и положительна в некоторой окрестности Θ, и при ограничении значений α, γ доказано, что случайные величины $n^{\frac{1}{2}(\alpha-2\gamma)} (x_n - \Theta)$ асимптотически нормальны.

В варианте, рассматриваемом в § 2-ом, на функции распределения $H(y|x)$ наложены только два условия, а именно (2.2) и выполнение неравенства $K_0|x - \Theta| \leqq |M'(x)| \leqq K_1|x - \Theta|$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. С небольшими изменениями в дополнительных предположениях справедливы и в этом случае все выше упомянутые теоремы.

§ 1-ый является реферирующим.

Примечание. В статье C. Derman, An application of Chung's lemma to the Kiefer-Wolfowitz stochastic approximation procedure, Annals Math. Stat. *27* (1956), 532—536 доказаны две теоремы, похожие на теоремы 5 и 7 (случай 3°) нашей статьи.

Summary

ON THE KIEFER-WOLFOWITZ APPROXIMATION METHOD

VÁCLAV DUPAČ, Praha.

(Received January 20, 1956.)

Asymptotic properties are established for the Kiefer-Wolfowitz [9] procedure of finding the value $x = \Theta$, for which the regression function $M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, \mathrm{d}H(y|x)$ achieves its maximum. The original assumptions are modified in such a way that it is possible to use the mathematical tools due to Chung [7]. Two different cases are treated. In the case considered in Sec. 3, all assumptions from [9] are accepted, some of them being strengthened: instead of (2.8) — from [9] — it is supposed that the inequality

$$K_0 \, |x - \Theta| \leqq |M'(x)| \leqq K_1 \, |x - \Theta| \, , \quad K_0 > 0, \quad K_1 > 0$$

holds in some neighbourhood of Θ; instead of (2.2) it is assumed, that a finite interval (A, B), containing Θ, is known, together with some lower estimates of $M(A)$, $M(B)$, and that $\int_{M(x)-C}^{M(x)+C} \mathrm{d}H(y|x) = 1$ holds for all $x \in \langle A, B \rangle$ (C being a constant).

The sequences $\{a_n\}$, $\{c_n\}$, occuring in the approximation scheme, are supposed to be of the type $a_n = \frac{a}{n^\alpha}$, $c_n = \frac{c}{n^\gamma}$; then the choice $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{4}$ (c being positive and a greater than a specific constant) is proved to be optimal. This choice ensures that $\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^2] = O(n^{-\frac{1}{2}})$ — every other choice can actually lead to a worse result. If in addition the existence of bounded $M'''(x)$ is supposed in some neighbourhood of Θ, then the best choice is $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{6}$, giving $\mathsf{E}[x_n - \Theta)^2] = O(n^{-\frac{2}{3}})$; if in some neighbourhood of Θ the function $M(x)$ is analytical and symmetrical about Θ, then for an arbitrary $\varepsilon > 0$ we can reach that $\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^2] = O(n^{-(1-\varepsilon)})$ by a suitable choice of α, γ. Under the additional hypothesis that $\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \, \mathrm{d}H(y|x)$ is continuous and positive in a neighbourhood of Θ and with a restriction on the range of α, γ, the asymptotic normality of the random variables $n^{\frac{1}{2}(\alpha-2\gamma)}(x_n - \Theta)$ is proved.

In the case considered in Sec. 2, only two conditions are set upon the distribution functions $H(y|x)$, namely, the (2.2) and the inequality $K_0|x - \Theta| \leq |M'(x)| \leq K_1|x - \Theta|$, holding for all $x \in (-\infty, +\infty)$. With some changes in additional conditions, all the theorems mentioned in the above case hold.

The Sec. 1 is an expository one.

Added in proof. C. Derman, An application of Chung's lemma to the Kiefer-Wolfowitz stochastic approximation procedure, AMS *27* (1956), pp. 532—536, has proved two theorems, which are similar to our Theorem 5 and Theorem 7 (case 3°).